517. 線狀函數方程式ニ就イテ(I)

北　川　敏　男（阪大）

1. 以下、本誌 108号 493番（以後コノ論文ヲ〔展(I)〕デ表ハス）デ述ベタ函數展開ノ一形式ヲ基礎ニシテ、或ル種ノ線狀函数方程式ヲ論ジタイト思フ。

尚以下述ベルコトニ於イテ線狀移動可能函数方程式論ノ諸結果ハ其レノ特殊ノ場合トシテ含マシメタイ。〔展(I)〕ニ於ケル記号及ビ規約等ハコヽデモ假定シテ進ム。

2. 今、Opération linéaire Γ ノ domain 並ニ range ヲ $d(\Gamma)$, $r(\Gamma)$ デ表ハシ、コレラハ(A)ノ部合集合ヲナストスル。$f \in (B)$, $\mathcal{D}f \in d(\Gamma)$, $f \in d(\Gamma)$, 且ツ $\Gamma f \in (B)$ ナルトキニハ,

(2.1)　$\Gamma \mathcal{D} f = \mathcal{D} \Gamma f$

デアルトスル。カヽル Opération Γ ニ附随シタ二種類ノ函数方程式

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad \Gamma f(x) = 0 \\
&(\mathrm{II}) \quad \Gamma f(x) = g(x)
\end{aligned}
\qquad (x \in X)
$$

（但シ, $g(x) \in r(\Gamma)$ トシテ）解 $f(x)$ ヲ $d(\Gamma)$ ニ於テ求メル問題ヲ考ヘル。

(I) ニ関シテハ, カヽル解ヲ $\{f_{\lambda k}(x)\}$ $\lambda \in \Lambda_k$ カラ適當ニツクッタ級数ニ展開スルコトニヨリ、解ノ諸性質ヲ見ヽウトシ、(II) ニ関シテハ, 定差法ニ於ケルガ如キ主解ガ問題ノ核心ヲナスコトニナル。

3. 展開ニ関スル基本事項

定理1. $\mathfrak{M}$ ニ属スルスベテノ λ ニ関シテ

$$(3.1) \qquad j_\lambda(x) \in d(\Gamma), \quad \Gamma j_\lambda(x) \in (B)$$

ナリトスレバ

$$(3.2) \qquad \Gamma j_\lambda(x) = G(\lambda)\, j_\lambda(x)$$

ナル如キ $\mathfrak{M}$ デ定義サレタ函数 $G(\lambda)$ ガ存在スル。

証明: 〔展(I)〕§2〔V〕ト Γ ノ *linéaire* ナコトカラ

$$\Gamma \mathcal{D} j_\lambda(x) = g(\lambda)\, \Gamma j_\lambda(x)$$

依ッテ (2.1) ニヨリ

$$\mathcal{D} \Gamma j_\lambda(x) = g(\lambda)\, \Gamma j_\lambda(x)$$

〔展(I)〕§2〔VI〕*Premier principe d'unicité* ニ依ッテ

$$\Gamma j_\lambda(x) = G(\lambda)\, j_\lambda(x)$$

ト書カレル。

或ル条件ノモトデ、$\mathfrak{M}$ ニ属スル任意ノ領域デ $G(\lambda)$ ノ正則ナルコトガ云ヘルト面白イノデアルガ今、コレニ触レナイ。

以下、$G(\lambda)$ ガソウシタ性質ヲ有スル場合ニツイテ展開ノ基本事項ヲノベル。

又、$g(\lambda)$ ノ逆函数ノ適当ナ *Branch* ヲ $g^{-1}(\lambda)$ トシテ $j_{g^{-1}(\lambda)}(x)$ ヲ基本函数ニトルコトニヨリ、始メカラ $g(\lambda)=\lambda$ トシテ議論ヲスヽメ得ル場合ヲ考ヘル。以上ノ約束ノ上デ,

$$(3.3)\quad S_r(x,t;f)\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{j_\lambda(x)}{\Gamma_t(j_\lambda(x))}\Gamma_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))\,d\lambda$$

ヲ考ヘル。茲デ $\Gamma_t(g(x))$ ノ意味ハ，函数 $g(x)$ ヲ或ル t ノ函数ヘウツストイフ意味デ t ヲ下ニツケタノデアル。コノデ t ヲ固定シテ考ヘルナラバ $\Gamma_t(f(x))$ ハ $f(x)$ ノ fonctionnelle linéaire デアツテ、〔展(I)〕ノ $\delta(f(x))$ ニ相當スルノデアル、コヽニ Delsarte ノ展開形式トノ關聯ガ生ジテクルノデアル。

定義1. Contour-integral (3.3) ヲバ，(Γ, C_r) ニ關聯シタ、$f(x)$ ノ点 t ニ於ケル Cauchy 和ト稱ス。
Γ ニ關スル若干ノ假定カラ

$$(3.4)\quad \Gamma_t(j_{\mu^k}(x))=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\{G(\mu)j_\mu(t)\}$$

ヲ得ラレルガ、コレモ假定シテ進マウ。然ルトキ

定理2. $\Gamma_t(j_\mu(x))=0\ (1\leqq\nu\leqq k)$ ナラバ，μ ヲソノ内部ニ含ムヤウナ任意ノ contour C_r ニ關シテ

$$(3.5)\quad S_r(x,t;j_{\mu^\nu})=j_{\mu^\nu}(x).\quad (1\leqq\nu\leqq k)$$

証明. 〔展(I)〕§2〔VIII〕ノ記号ノ意味デ $j_{\mu^\nu}(x)$ ハ $j_{\mu^{\nu-1},\mu}(x)$ ニ外ナラナイカラ

$$(3.6)\quad \Gamma_t(\mathcal{L}_\lambda(j_{\mu^\nu}(x)))=\Gamma_t\left(\frac{j_{\mu^{\nu-1},\lambda}(x)-j_{\mu^\nu}(x)}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=\frac{\Gamma_t(j_{\mu^{\nu-1},\lambda}(x))-\Gamma_t(j_{\mu^\nu}(x))}{\lambda-\mu}$$

$$=\frac{\Gamma_t(j_{\mu^{\nu-1},\lambda}(x))}{\lambda-\mu}$$

以下 $\Gamma_t(j_{\mu\rho}(x))=0$ （$1\leqq\rho\leqq\nu$）ヲ利用シテ、漸化的ニ歩ヲ進メルトキ

$$(3.7)\quad \Gamma_t(\mathcal{L}_\lambda(j_{\mu\nu}(x)))=\frac{\Gamma_t(j_\lambda(x))}{(\lambda-\mu)^\nu}=\frac{G(\lambda)j_\lambda(t)}{(\lambda-\mu)^\nu}$$

ヲ得ル。依ッテ

$$(3.8)\quad S_r(x,t;f)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{j_\lambda(x)G(\lambda)j_\lambda(t)}{G(\lambda)j_\lambda(t)(\lambda-\mu)^\nu}d\lambda$$

$$=\frac{1}{\nu!}\ \frac{\partial^\nu}{\partial\lambda^\nu}j_\lambda(x)=j_{\lambda\nu}(x)$$

——（証明終）——

規約．　$d(\vartheta^n)=(B_n)$ デ表ハス、$\vartheta^n f(x)$ が存在スルトキニハ，$\vartheta^\mu(\vartheta^\nu(f(x)))=\vartheta^\nu(\vartheta^\mu(f(x)))=\vartheta^n f(x)$ が $\mu+\nu=n$ ナルスベテノ自然数ノ組（μ,ν）ニ對シテ成立スルトスルノデアルカラ

$$(3.9)\quad (A)\supset(B)\equiv(B_1)\supset(B_2)\supset(B_3)\supset\cdots\cdots$$

トナッテキル。又 $r(\vartheta^n)\subset(A)$ （$n=1,2,3,\cdots\cdots$）モ假定スル。

然ルトキ，次ノ定理ヲ得。

定理3.　$f(x)$ 並ニ $\mathcal{L}_\lambda(f(x))$ が共ニ（B_n）ニ属スルトキニハ，$\vartheta(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$ 又（B_n）ニ属スル。更ニ今

$$(3.10)\quad \Gamma_t(\vartheta^\nu(f(x)))=0 \qquad (\nu=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$$

ナリトスレバ

$$(3.11)\quad S_r(x,t;f)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{j_\lambda(x)}{\lambda^n\Gamma_t(j_\lambda(x))}\Gamma_t(\vartheta^n(\mathcal{L}_\lambda(f)))d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_n} \frac{j_\lambda(x)\, k(\lambda)}{\lambda^n} d\lambda$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_n} \frac{j_\lambda(x)}{\lambda^n \Gamma_t(j_\lambda(x))} \Gamma_t(\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n(f)))d\lambda$$

証明．〔展（1）〕§2〔VII〕ノ $\mathcal{L}_\lambda(f(x))$ ノ性質ト、仮定トニヨリ

$$\vartheta^n(\vartheta\mathcal{L}_\lambda(f(x)) = \lambda\vartheta^n(\mathcal{L}_\lambda(f(x)) + \vartheta^n f(x)$$

他方ニ於イテ $\vartheta^n f(x) \in (A)$ ダカラ

$$\vartheta(\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n(f(x))) = \lambda\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n(f(x))) + \vartheta^n f(x)$$

ナル如キ（C）ニ属スル函数 $\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n(f))$ ガ一意ニ定マル。依ツテ

$$\vartheta(\vartheta^n(\mathcal{L}_\lambda(f(x)) - \mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n(f(x)))$$
$$= \lambda(\vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x)) - \mathcal{L}_\lambda\vartheta^n(f(x)))$$

ガ上ノ二式カラ得ラレル。サテ

$$\vartheta^n(\mathcal{L}_\lambda(f(x)) \in d(\vartheta) = (B)$$

且ツ　$\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n(f(x)) \in (C) \subset (B)$ デアルカラ

$$\vartheta^n(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) - \mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n(f(x)) \in (B)$$

デアリ、従ツテ〔展（1）〕§2〔VI〕*Premier principe d'unicité* ニヨリ

$$\vartheta^n(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) - \mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n(f(x))) = k(\lambda) j_\lambda(x) \tag{3.12}$$

ト書カレル。

又、$(B_1) \supset (B_2) \supset \cdots\cdots \supset (B_n)$ デアルカラ $\vartheta^\nu(\mathcal{L}_\lambda(f))$ ハ悉ク存在シ（$1 \leqq \nu \leqq n$），順次

$$\vartheta^\nu(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) = \lambda\vartheta^{\nu-1}(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) + \vartheta^{\nu-1}f(x)$$

($\nu=1, 2, \cdots\cdots, n$) ガ成立スルカラ

$$(3.13)\qquad \vartheta^n(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1}\vartheta^{n-k}(f(x)) + \lambda^n \mathcal{L}_\lambda(f(x))$$

トナル。コヽデ、$\Gamma(\vartheta^\nu)\in(A)$ ナルコトカラ $d(\Gamma)\subseteqq(A)$ ダカラ、コノ式ト假定トニヨリ

$$(3.14)\qquad \Gamma(\vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x))) = \lambda^n\Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$$

ヲ得ル。(3.12), (3.14) ヲ併セテ

$$(3.15)\qquad \Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) = \frac{1}{\lambda^n}\Gamma(\vartheta^n(\mathcal{L}_\lambda(f(x))))$$

$$= \frac{1}{\lambda^n}\left\{\Gamma(\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))) + k(\lambda) j_\lambda(x)\right\}$$

コレカラ (3.11) ガ得ラレル。

定理4. 今次ノ條件ガ充サレテヰルトスル。

(i) $f(x)\in(A)$ ニシテ函数方程式 (I) ノ解デアル。即チ, 任意ノ $t\in X$ ニ對シテ

$$\Gamma_t(f(x))=0$$

(ii) $\lambda\in\mathfrak{M}_t$ ニ對シテ $\Gamma_t(j_\lambda(x))$, $\Gamma_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$ ハ共ニ t ノ函数トシテ (B) ニ属スル。

然ルトキニハ, Cauchy 和 $S_r(x, t; f)$ ハ, 任意ノ $\mathfrak{C}_r$ ニ對シテ t ニ無関係デアル。即チ $t\in X$, $t'\in X$ ナルトキ常ニ

$$S_r(x, t; f) = S_r(x, t'; f)$$

ガ成立スル。

證明。一般ニ

$$\Gamma_t(\vartheta(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))) = \lambda\Gamma_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) + \Gamma_t(f(x))$$

コヽニ假定(i),(ii)並ニ(2.1)ニヨツテ

$$\vartheta(\Gamma_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))) = \lambda\Gamma_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$$

從ツテ〔展(I)〕§2〔VI〕*Premier principe d'unicité* ニ依ツテ

$$\Gamma_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) = g(\lambda)\, j_\lambda(t)$$

トイフ形デ書キ得ラレル。又條件(ii)ト(2.1)トニヨリ

$$\vartheta(\Gamma_t(j_\lambda(x))) = \Gamma_t(\vartheta(j_\lambda(x))) = \Gamma_t(\lambda j_\lambda(x))$$
$$= \lambda\Gamma_t(j_\lambda(x))$$

依ツテ又

$$\Gamma_t(j_\lambda(x)) = G(\lambda)\, j_\lambda(t)$$

トナル。コレカラ所要ノ結果ヲ得ラレルコトハ明ラカ。

注意：展開形式ニ於テ $\delta\{f(x)\}$ ナル *fonctionnelle linéaire* ガ與ヘラレタトキ、或ル t_0 ニ於テ

$$\delta\{f(x)\} = \Gamma_{t_0}[f(x)]$$

トナリ且ツ§2ノ條件ニミタス *Operateur linéaire* $\Gamma_t(f(x))$ ハ存在スルカ、又如何ナル場合ニ於テ一意的ニ存在スルカハ一ツノ問題デアル。〔展(II)〕デ論ジタ Bessel 函數展開デ，Fourier-Bessel ノ場合ニハ，

$$\Gamma_t(j(\lambda x)) = j(\lambda b)\, j(\lambda t)$$

ナル如キ Γ ヲ考ヘル. $j(\lambda b) = 0$ ニナルヤウナ λ ノ集合ヲ $\{\lambda_n\}$ デアラハス（コノ際コレラハ皆單根デアル)。$f(x) \in (A)$ デアツテ,

$$f(x) \sim \sum c_n j(\lambda_n x) \qquad (*)$$

ナルトキ

$$f_1(t) \sim \sum C_n j(\lambda_n b) j(\lambda_n t) \qquad (**)$$

ナル如キ $f_1(t)$ ガ (A) ニ属スルナラバ、

$$\Gamma_t(f(x)) = f_1(t)$$

ナリト定義スレバ

$$f(b) = \sum c_n j(\lambda_n b)$$

ナル限リ（コレハ、点 b ニテ、$f(x)$ ガ素直ナ函数（例ヘバ有界変分デ且ツ連続）デアレバ成リ立ツコトデアル）

$$\Gamma_0(f(x)) = f(b) = \delta(f(x))$$

トナツテ所要ノ結果ガ得ラレル。(*) ニ於イテ、係数 C_n ガ Cauchy 和ニヨツテ與ヘラレルコトハ言フマデモナイ。